Télécom Bretagne Année 2014-2015

Contrôle sur les EDS
Durée : 1 heure ; sans documents ; le sujet comporte 2 exercices dont les questions sont indépendantes.

rappels

1. On dit qu'un processus $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs réelles est un mouvement brownien standard si $B_0 = 0$ et les accroissements de B sont stationnaires et indépendants avec $B_{t_j} - B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_j - t_i)$ pour $t_j > t_i$.
2. Un processus $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$,
   (a) M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable (M est $\mathcal{F}$-adapté)
   (b) $\mathbb{E}[|M_t|\,|\mathcal{F}_t] < \infty$
   (c) $\mathbb{E}[M_t|M_s] = M_s$ pour $s \leq t$.
3. On rappelle la formule d'Itô scalaire : si $dX_t = b_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)dB_t$,

$$dg(t,X_t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2$$

   avec $(dX_t)^2 = \sigma_t^2(X_t)dt$.

Exercice I : mouvement brownien (8 points)
Soit B un mouvement brownien.
1) Vérifier que la loi de $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ est de la forme $\mathcal{N}(0, \mathbf{C})$ où $\mathbf{C}$ est une matrice $n \times n$ de terme général $[\mathbf{C}]_{ij} = \min(t_i, t_j)$.
2) Montrer que B est une martingale.
3) En utilisant la formule d'Itô, montrer que

$$\int_0^t B_t dB_t = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}dt. \tag{1}$$

4) Vérifiez que $X_t = a^{-1}B_{a^2t}$ ($a \neq 0$) est un mouvement brownien standard.

Exercice II : EDS (12 points)
Résoudre les EDS suivantes pour $t > 0$ et $X_0 = x_0$ fixé.
1) $dX_t = bX_tdt + \sigma X_tdB_t$ où b et σ sont des constantes fixées.
2) $dX_t = X_tdt + e^{-t}dB_t$
3) $dX_t = \frac{1}{2}e^{B_t}dt + e^{B_t}dB_t$