Télécom Bretagne Année 2013-2014

Contrôle sur les EDS
Durée : 1 heure ; sans documents ; le sujet comporte 3 exercices.

Indications

1. Dans la suite, B, B_1 et B_2 représenteront des mouvements browniens standard ($B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$).
2. On rappelle la formule d'Itô scalaire : si $dX_t = b_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)dB_t$,

$$dg(t,X_t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2$$

avec $(dX_t)^2 = \sigma_t^2(X_t)dt$.

3. Si le vecteur $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ est gaussien, la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est une loi gaussienne de moyenne $\mathbb{E}[X] + cov(X,Y) \times cov(Y)^{-1}\ [y - \mathbb{E}[Y]]$ et de covariance $cov(X) - cov(X,Y) \times cov(Y)^{-1} \times cov(Y,X)$

Exercice I (7 points)
On considère l'EDS (équation différentielle stochastique) suivante : $dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dB_t$ où b et σ sont des constantes fixées et $X_0 = x$, avec $x > 0$. Intégrez cette équation pour $t > 0$ et exprimez X_t en fonction de x et des paramètres de l'équation.

Exercice II (5 points)
Si $dX_{1,t} = b_1 dt + \sigma_1 dB_{1,t}$ et $dX_{2,t} = b_2 dt + \sigma_2 dB_{2,t}$, où b_1, b_2, σ_1, σ_2 sont des constantes fixées, calculez la valeur des coefficients b et σ de l'EDS $dX_t = bdt + \sigma dB_t$ satisfaite par le processus $X = X_1 + X_2$.

Exercice III (8 points)
On suppose que les mouvements browniens B_1 et B_2 sont corrélés, avec $\begin{bmatrix} B_{1,t} \\ B_{2,t} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$ et $\mathbb{E}[B_{1t}B_{2s}] = \rho \min(t,s)$.

1) Calculez la loi de $B_{2,t}$ sachant $(B_{1,t_1} = a, B_{1,t_2} = b)$, avec $t_1 \leq t \leq t_2$.

2) Que peut-on dire de cette loi lorsque $\rho = 1$.