Télécom Bretagne Année 2016-2017

Contrôle sur les EDS
Durée : 1 heure ; sans documents ; le sujet comporte 4 exercices indépendants.

Rappels

1. On dit qu'un processus $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs réelles est un mouvement brownien standard si $B_0 = 0$ et les accroissements de B sont stationnaires et indépendants avec $B_{t_j} - B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_j - t_i)$ pour $t_j > t_i$.
2. Formule d'Itô scalaire : si $dX_t = b_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)dB_t$,
$$dg(t,X_t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2$$
avec $(dX_t)^2 = \sigma_t^2(X_t)dt$.
3. Formule d'Itô vectorielle : soit $B_t = [B_{1,t},\dots,B_{m,t}]^T$ un mouvement brownien de dimension m dont les composantes sont indépendantes et $X_t = [X_{1,t},\dots,X_{n,t}]^T$ un processus d'Itô de dimension n de la forme
$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t = \begin{bmatrix} b_{1,t} \\ \vdots \\ b_{n,t} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} & \dots & \sigma_{1m,t} \\ & \vdots & \\ \sigma_{n1,t} & \dots & \sigma_{nm,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_{1,t} \\ \vdots \\ dB_{m,t} \end{bmatrix} \tag{1}$$
et $Y_t = g(t,X_t) = [g_1(t,X_t),\dots,g_p(t,X_t)]^T = [Y_{1,t},\dots,Y_{p,t}]^T$ avec g de classe $C^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n)$. Alors, Y est un processus d'Itô donné par
$$dY_{k,t} = \frac{\partial g_k(t,X_t)}{\partial t}dt + [\nabla_x g_k(t,X_t)]^T dX_t + \frac{1}{2}dX_t^T\ \nabla_x^2 g_k(t,X_t)\ dX_t \tag{2}$$
avec $[\nabla_x g_k(t,X_t)]_i = \dfrac{\partial g_k(t,X_t)}{\partial x_i}$ et $[\nabla_x^2 g_k(t,X_t)]_{ij} = \dfrac{\partial^2 g_k(t,X_t)}{\partial x_i \partial x_j}$ et en utilisant les conventions $dB_{i,t}.dt = dt.dB_{i,t} = 0$ et $dB_{i,t}.dB_{j,t} = \delta_{ij}dt$.

Exercice I
Résolvez, en justifiant votre réponse, l'EDS suivante :
$$dX_t = [\sin^2(B_t) + t\cos(2B_t)]dt + t\sin(2B_t)dB_t$$
Indication : on pourra considérer la transformation $g(x,t) = t\sin^2 x$

Exercice II
Indiquez l'EDS dont le processus $Y_t = e^{B_t}$ est solution. Même question avec le processus $Z_t = e^{Y_t}$

.

Exercice III
Soit $B_t = [B_{1,t},\dots,B_{m,t}]^T$ un mouvement brownien de dimension m dont les

composantes sont indépendantes et $\mathbf{A}$ une matrice inversible. Donnez la loi de $X_t = \mathbf{A}B_t$. Montrez que $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est une martingale, c'est à dire que $\mathbb{E}[X_t|X_s] = X_s$ pour $s \leq t$.

Exercice IV
Résoudre en justifiant votre réponse l'EDS suivante :

$$dX_t = rX_tdt + X_t(\sum_{k=1}^{m} a_k dB_{k,t}) \tag{3}$$

où $B_t = [B_{1,t}, \ldots, B_{m,t}]^T$ un mouvement brownien de dimension m dont les composantes sont indépendantes.