IMT Atlantique — Année 2017-2018

Examen sur les EDS
Durée : 1 heure ; sans documents ; le sujet comporte 2 exercices indépendants.

Rappels

1. On dit qu'un processus $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs réelles est un mouvement brownien standard si $B_0 = 0$ et les accroissements de B sont stationnaires et indépendants avec $B_{t_j} - B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_j - t_i)$ pour $t_j > t_i$.
2. Formule d'Itô scalaire : si $dX_t = b_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)dB_t$,

$$dg(t,X_t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2$$

   avec $(dX_t)^2 = \sigma_t^2(X_t)dt$.

Exercice I
1) Résolvez, en justifiant votre réponse, l'EDS suivante :

$$dX_t = [(1+\frac{t}{2})\cosh B_t + 2t]dt + t\sinh(B_t)dB_t.$$

Indication : on pourra considérer la transformation $g(x,t) = t\cosh x + t^2$.
2) Montrez que l'équation de départ s'écrit également

$$X_t = X_0 + t\cosh(t) + t^2 + \int_0^t k(u,B_u)du,$$

où on précisera la forme de l'expression $k(u,B_u)$. Indication : on pourra utiliser la formule d'intégration par parties.
Exercice II
Soient B un mouvement brownien standard et $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$

$$X_t = B_t + cB_{2t}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est fixé.
1) Donnez la loi de X_t.
2) Le processus X est-il un mouvement brownien.
3) Calculez la loi de X_t conditionnellement à $X_{t_1} = x_1$, en supposant que $t \in [0, t_1]$.