Contrôle sur les EDS
Durée : 1 heure
Le sujet comporte 1 exercice.

Soient $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ deux mouvements browniens standard, c'est à dire qu'ils vérifient $B_t^{(i)} \sim \mathcal{N}(0,t)$ pour $i = 1,2$. On suppose que $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ sont corrélés, avec $\mathbb{E}[B_t^{(1)} B_s^{(2)}] = \rho \min\{t,s\}$.

1) Montrer que les accroissements du processus vectoriel $B_t = [B_t^{(1)},\ B_t^{(2)}]^T$ sont stationnaires et indépendants. Plus précisemment, on vérifiera que pour $s \leq t$, $\mathbb{E}[(B_t - B_s)(B_t - B_s)^T]$ s'écrit en fonction de $t-s$ et que pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, $B_{t_4} - B_{t_3}$ et $B_{t_2} - B_{t_1}$ sont décorrélés.

2) Montrer que l'on peut écrire

$$\begin{bmatrix} B_t^{(1)} \\ B_t^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \tilde{B}_t^{(1)} \\ \tilde{B}_t^{(2)} \end{bmatrix} \tag{1}$$

où $\tilde{B}_t^{(1)}$ et $\tilde{B}_t^{(2)}$ sont des mouvements browniens standard indépendants et $\mathbf{M}$ une matrice que l'on précisera.

Pour construire $\mathbf{M}$, on pourra par exemple considérer la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance $\mathbf{R}$ de $[B_t^{(1)},\ B_t^{(2)}]^T$ et en déduire une représentation de celle ci sous la forme $\mathbf{R} = \mathbf{M}\mathbf{M}^T$.

On vérifiera alors que l'on a bien $\mathbb{E}[\tilde{B}_t^{(1)} \tilde{B}_s^{(2)}] = 0$ pour tous $t,s \in \mathbb{R}_+$.

2) Résoudre les équations de Langevin couplées :

$$\begin{aligned} dX_t^{(1)} &= (C_{11} X_t^{(1)} + C_{12} X_t^{(2)})dt + \sigma_1 dB_t^{(1)} \\ dX_t^{(2)} &= (C_{21} X_t^{(1)} + C_{22} X_t^{(2)})dt + \sigma_1 dB_t^{(2)} \end{aligned} \tag{2}$$

On commencera par reformule ces équations sous forme matricielle et en fonction de $\tilde{B}_t = [\tilde{B}^{(1)},\ \tilde{B}^{(2)}]T$, afin d'obtenir une formulation classique des EDS vectorielles pour lesquelles on suppose généralement des mouvements browniens vectoriels avec des composantes indépendantes. On posera en particulier $X_t = [X_t^{(1)},\ X_t^{(2)}]^T$. On effectuera ensuite le changement de variable $Y_t = e^{-Kt} X_t$ et on appliquera la formule d'Itô vectorielle, en choisissant K de sorte à faciliter l'intégration (on pourra s'inspirer de la résolution de l'équation de Langevin dans le cas scalaire).