Télécom Bretagne Année 2015-2016

**Contrôle sur les EDS**
**Durée : 1 heure ; sans documents ; le sujet comporte 2 exercices dont les questions sont indépendantes.**

**rappels**

1. On dit qu'un processus $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ à valeurs réelles est un mouvement brownien standard si $B_0 = 0$ et les accroissements de $B$ sont stationnaires et indépendants avec $B_{t_j} - B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_j - t_i)$ pour $t_j > t_i$.
2. Un processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$,
   (a) $M_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable ($M$ est $\mathcal{F}$-adapté)
   (b) $\mathbb{E}[|M_t| \, |\mathcal{F}_t] < \infty$
   (c) $\mathbb{E}[M_t | M_s] = M_s$ pour $s \leq t$.
3. On rappelle la formule d'Itô scalaire : si $dX_t = b_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)dB_t$,
$$dg(t, X_t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2$$
   avec $(dX_t)^2 = \sigma_t^2(X_t)dt$.

**Exercice I**

On considère l'EDS (équation différentielle stochastique) suivante :

$$dX_t = r(1 - aX_t^2)X_t dt + cX_t dB_t \tag{1}$$

1) Appliquer la formule d'Itô pour décrire l'EDS satisfaite par $Y_t = g(t, X_t)$, avec $g(t, x) = 1/x^2$.

2) Intégrer cette équation pour $t > 0$ et en déduire $X_t$ en fonction de $X_0$ et des paramètres de l'équation.

**Exercice I : mouvement brownien (8 points)**
Soit $B$ un mouvement brownien.
1) Vérifier que la loi de $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ est de la forme $\mathcal{N}(0, \mathbf{C})$ où $\mathbf{C}$ est une matrice $n \times n$ de terme général $[\mathbf{C}]_{ij} = \min(t_i, t_j)$.
2) Montrer que $B$ est une martingale.
3) En utilisant la formule d'Itô, montrer que

$$\int_0^t B_t dB_t = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}dt. \tag{2}$$

4) Vérifiez que $X_t = a^{-1}B_{a^2 t}$ ($a \neq 0$) est un mouvement brownien standard.

**Exercice II : EDS (12 points)**

Résoudre les EDS suivantes pour $t > 0$ et $X_0 = x_0$ fixé.

1) $dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dB_t$ où $b$ et $\sigma$ sont des constantes fixées.

2) $dX_t = X_t dt + e^{-t} dB_t$

3) $dX_t = \frac{1}{2} e^{B_t} dt + e^{B_t} dB_t$